2. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений – М: Наука, 1978. – 592 с.

О ПОСТРОЕНИИ КЛАССОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ РАХМАНОВА[1]

Морозов И.А., Полнер М.П., Севодин М.А.

Перский государственный технический университет

В данной работе для построения достаточных условий однолистности аналитических функций применен метод Рахманова [1], который базируется на использовании различных однопараметрических семейств кривых. Возможности этого метода изучены на примере конкретных семейств, что позволило получить некоторое обобщение самого метода и выделить новые классы однолистных функций.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\gamma = \Gamma_a$ простых (т.е. без точек самопересечения) кривых Γ_a, которое покрывает плоскость и получается сдвигом или вращением относительно какой-либо точки плоскости одной из кривых Γ_a. Кроме того, будем считать, что при разных параметрах a_1 и a_2 кривые Γ_{a_1} и Γ_{a_2} не пересекаются. Предположим также, что функция $z = z(\zeta)$, аналитическая и локально однолистная в $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, непрерывна в замкнутом круге $\overline{E}$. Пусть $L = \{z : z = z(e^{i\tau}),\ 0 \le \tau < 2\pi\}$ – граница образа E при отображении функцией $z(\zeta)$. Тогда точками пересечения Γ_a и L определится некоторая однозначная функция $a(\tau)$, $0 \le \tau \le 2\pi$. В [1] требование строгой монотонности $a(\tau)$ обеспечивало однолистность функции $z = z(\zeta)$ в E. В случае рассматриваемых семейств кривых это требование можно ослабить. Именно, мы будем считать, что функция $a(\tau)$ может принимать одно и то же значение не более чем в двух различных точках промежутка $[0, 2\pi)$. Тогда можно кривую L разбить на две простые дуги L_1 и L_2 и, используя результаты [2], установить однолистность функции $z = z(\zeta)$ в E. На основе этих рассуждений были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть вещественная функция $\varphi(\tau)$ определена и дифференцируема на $(0, +\infty)$, а функция $z(\zeta)$ аналитична в $\overline{E}$, $z(0) = 0$,*

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП "ИНТЕГРАЦИЯ", проект N97-01.

$z'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in E$. Если при некотором δ, $0 < \delta < 1$, функция $z(\zeta)$ в кольце $E_\delta = \{\zeta : \delta \leq |\zeta| \leq 1\}$ удовлетворяет условию

$$\Re\left((1 - i|z(\zeta)|\varphi'(|z(\zeta)|))\zeta\frac{z'(\zeta)}{z(\zeta)}\right) \geq 0,$$

то функция $z(\zeta)$ однолистна в E ($\Re$ – обозначение вещественной части).

Теорема 2. *Пусть вещественная функция $\varphi(r)$ определена и дифференцируема на $(0, +\infty)$, а функция $z(\zeta)$ аналитична в $\overline{E}$, $z'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in E$. Если при некоторых δ, τ_0, $0 < \delta < 1$, $0 < \tau_0 < 2\pi$, функция $z(\zeta)$ в кольце $E_\delta = \{\zeta : \delta \leq |\zeta| \leq 1\}$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left((1 - i|z(\zeta)|\varphi'(|z(\zeta)|))\omega(\zeta)\frac{z'(\zeta)}{z(\zeta)}\right) \geq 0,$$

где $\omega(\zeta) = -e^{i\frac{\tau_0}{2}}\left(1 - 2cos\frac{\tau_0}{2}e^{-i\frac{\tau_0}{2}}\zeta + e^{-i\tau_0}\zeta^2\right)$, то функция $z(\zeta)$ однолистна в E.

Теорема 3. *Пусть вещественная функция $\psi(y)$ определена и дифференцируема на (α, β), $\lim\limits_{y\to\alpha+0}\psi(y) = -\infty$, $\lim\limits_{y\to\beta-0}\psi(y) = +\infty$, а функция $z(\zeta)$ аналитична в $\overline{E}$, $z'(\zeta) \neq 0$ и $\zeta \in E$. Если при некоторых δ и τ_0, $0 < \delta < 1$, $0 < \tau_0 < 2\pi$, функция $z(\zeta)$ в кольце $E_\delta = \{\zeta : \delta \leq |\zeta| \leq 1\}$ удовлетворяет условию*

$$\Re\left((1 - i\psi'(\Im z(\zeta)))i\omega(\zeta)z'(\zeta)\right) \geq 0,$$

где $\omega(\zeta)$ из теоремы 2, то функция $z(\zeta)$ однолистна в E ($\Im$ – обозначение мнимой части).

В теоремах 1, 2 рассматриваются семейства с параметрическим уравнением $z(t) = te^{i(\varphi(t)+a)}$, $0 < t < \infty$, $0 \leq a < 2\pi$, а в теореме 3 – $z(t) = \psi(t) + a + it$, $\alpha < t < \beta$, $a \in R$. Условия теоремы 1 обеспечивают монотонность $a(\tau)$, а условия теорем 2 и 3 – наличие двух участков монотонности $a(\tau)$ разного характера.

Отметим в заключение, что в частном случае из теоремы 1 получаются классы звездных, спиралеобразных функций и некоторые классы функций из [3], а из теоремы 3 - класс выпуклых в одном направлении функций (см., например, [4]).

Литература

1. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций// Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30. – N 4. – С. 3-60.

2. *Аксентьев Л.А.* Применение принципа аргумента к исследованию условия однолистности, I// Изв. вузов. Математика. – 1968. – N 12. – С. 3-15.

3. *Рахманов Б.Н.* К теории функций//Докл. АН СССР. – 1953. – N 4. – С. 729-732.

4. *Robertson M.S.* Analytic functions starlike in one direction// Amer. J. Math. – 1936. – No 58. – P. 465-472.

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Розанов Э.Е.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

Движение крылового профиля над твердой поверхностью (экраном) реализуется при взлете-посадке самолетов и является основным режимом при полете экранопланов. Известно, что у реальных крыловых профилей при приближении к экрану наблюдается повышение подъемной силы по сравнению с движением профиля в безграничном потоке. Исследования показали (см., например, [1, 2]), что для реализации этого эффекта нижняя поверхность должна быть достаточно плоской. Для других профилей (например, с сильно выпуклой нижней поверхностью) приближение к экрану может вызывать обратный эффект: подъемная сила будет падать и даже становиться отрицательной, то есть возникнет не подъемная, а притягивающая сила.

Построение решений плоских прямых и обратных краевых задач о движении профиля над экраном, а также задач аэродинамической оптимизации вызывает большие трудности из-за двусвязности области течения. Поэтому важное значение приобретают надежные вычислительные